１．目的

周期関数や有限区間で定義された関数を三角関数の重ね合わせで表すフーリエ級数についてその基本を復習し、さらに、表計算ソフトを利用して、数式入力により自分で定義した関数を有限項のフーリエ級数で近似する実験を行い、項数が増えるにつれ近似の精度が上がっていくことを直観的に確かめる。

２．原理

有限区間で定義された関数や周期2Lの周期関数f(x)は、（電気電子情報工学科で実際に測定する信号や、「グラフの描ける」関数では満たすことができる、ある数学的条件のもと）以下のように三角関数で展開でき、またその展開係数はf(x)と三角関数の内積によって決まる。

(1)

(2)

(3)

上記の級数においては、一般には無限項が必要となるが、これを有限項で打ち切った関数

(4)

はととの1次結合による関数f(x)の近似の中で最良の近似を与えることが、三角関数の直交性から示せる。さらに、その誤差の大きさ(誤差の2重ノルム)はNが増大するにつれ、減少し、0に収束することが知られている。現実のデータ処理において、無限項の計算は不可能であり、このような有限項近似が非常に有効とされる。

なお、f(x)が不連続点を持つ場合は。不連続点付近で「Gibbsの減少」が発生し、級数の収束が悪くなるだけでなく、一様収束しなくなるという問題が起きる。有限区間で定義された関数は、繰り返しにより周期関数と等価とみなされるため、有限区間の両端のf(-L)とf(L)の値が異なる場合にも両端に不連続が存在することになり、付近において、同様の現象が起こってしまう。この現象は、データ処理において、しばしば望ましくない結果をもたらすので、注意が必要である。

本実験において、これらのことを直観的に確かめるため、まずはフーリエ解析の教科書[1]に載っているp4~p11練習問題の例1~例6のいずれかの問題について、表計算ソフト関数を数式入力することにより、関数のフーリエ級数による有限項近似を計算してグラフを作成することでその振る舞いを観察する実験を行う。また、各自で好きな関数を定義し、表計算ソフトに数式入力をしてグラフを作成することにより、その振る舞いを観察する実験を行う。

なお(2)(3)においては、積分計算を行う必要があるが、計算機ではこれを数値積分に置き換えて近似値を求める。数値積分には台形公式や、シンプソンの公式など、多くの方法があるが、本実験では、最も簡単な方法として、等間隔離散化よるリーマン和を用いる。これは、積分の近似値を求める際に座標を間隔で等間隔に離散化し、積分をリーマン和で近似するものである。たし、である。

リーマン和が積分に近似される理由を簡単に説明する

区間 を n個の小区間に分け、各小区間の幅を とする。

各小区間では、点を選び、その点での関数値­­を使用すると、

小区間内の面積を、関数値­­に小区間の幅を掛けた長方形の面積として近似できる。

本実験では、とする。このため、N-π=-100, Nπ=100となり、また、

となるので、積分(2)(3)の近似は、

(6)

(5)

となり、これらの値は表計算ソフトExcelで計算することができる。また有効近似(4)のN=3,5,8,10,12のものを真の関数と比較する。

３．実験方法

本実験は2つの部分からなり、前半は教科書[1]の練習問題に載っている関数についてのフーリエ級数による有限項近似の実験、後半は各自で定義した関数についてのフーリエ級数による有限項近似の実験である。

前半部分は、1.表計算ソフトに数式入力をすることによる関数f(x)の入力、2.表計算ソフトによるフーリエ級数の展開係数の計算と結果の確認、3.表計算ソフトによるフーリエ級数の有限項近似の計算とグラフ作成の3つの手順からなる。

前半

まず、Excell1１のA列目のセルには、リーマン和の計算式(5)、(6)のとして、Ａ2～Ａ201に-100～100までの数値を入力をする。次に、Ｂ列目には、の値、

として、BA（）を入力する。Ｃ列目には、の値として、今回は、教科書のp4の例題１ を

C（）に入力する。本実験では、Ｎは12までなので、(2)式で用いるためにＤ～Ｐ列目には、()、Q～ＡＢ列には、(3)式で用いるために、をそれぞれ入力する。次に、ＡＣ～ＡＯに()、

ＡＰ～ＢＡに()を入力する。

次に、AC~BAの各列に、2行目のセルから201行目のセルまでの値の和をとって100で割れば、リーマン和(5)(6)が求まる。

そして、の値を、BB～BZ列に入力し、最終的なとして、N=3,5,8,10,12の時の値を、それぞれ

のにNを代入してCA～CE列に入力した。

後半

描画ソフトを用いて、Gibbsの現象が起きる関数と起きない関数を一つずつ各自で用意する。前半と同様に表計算ソフトExcelに入力していき、フーリエ級数の有限項近似として、前半のを変更した作業を同じように行う。

４．実験結果

(１)前半の実験結果を以下に示す。教科書のp4の例題１ を対象とした実験結果を図１に示す。また、の誤差をN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときでそれぞれ比較する。

図１．のフーリエ級数変換

表１．と有限項近似の誤差の平均



さらに補足として、真の関数f(x)とN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときの平均二乗誤差を以下に示す。

表２．の平均二乗誤差



また、の展開係数、の比較を以下の表に示す。

表３．展開係数の比較





表４．展開係数の比較





理論値と計算値の比較をしてみると、誤差はほとんどなく、展開係数の近似はよくできていると考えられる。

(２)後半部分の実験結果を以下に示す。

一つ目の関数は、Gibbsの現象が起こらない関数として、両端の値がほぼ等しい関数を用いた。実験結果を以下の図に示し、また、の誤差をN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときでそれぞれ比較する。

図２．Gibbsの現象が起こらないのフーリエ級数展開

表３．と有限項近似の誤差の平均



さらに補足として、真の関数f(x)とN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときの平均二乗誤差を以下に示す。

表４．Gibbsの現象が起こらないの平均二乗誤差



二つ目の関数として、Gibbsの現象が起こりやすい関数として、両端の値が大きく異なる関数を用いた。実験結果を以下の図に示し、また、の誤差をN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときでそれぞれ比較する。

図３．Gibbsの現象が起こりやすいのフーリエ級数展開

表５．と有限項近似の誤差の平均



さらに補足として、真の関数f(x)とN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときの平均二乗誤差を以下に示す。

表６．Gibbsの現象が起こりやすいの平均二乗誤差



三つ目の関数として、収束が起こりにくい関数として、変化が急峻大であったり、直線の部分があったり、値の上下が細かい関数を用いた。実験結果を以下の図に示し、また、の誤差をN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときでそれぞれ比較する。

図４．収束が起こりにくいのフーリエ級数展開

表７．と有限項近似の誤差の平均



さらに補足として、真の関数f(x)とN=3,N=5,N=8,N=10,N=12のときの平均二乗誤差を以下に示す。

表６．収束が起こりにくいの平均二乗誤差



５．検討事項

(1)N=3,5,8,10,12と真の関数にどのように近づいているか

それぞれのフーリエ級数展開について、N=3,5,8,10,12の時のとの誤差、平均誤差二乗誤差をグラフにしたものを以下に示す。

図５．前半の誤差　　　　　　　　　　　図６．前半の平均二乗誤差

図８．後半(Gibbsが起こらない)の平均二乗誤差

図７．後半(Gibbsが起こらない)の誤差

図１２．後半(収束が難しい)の平均二乗誤差

図１１．後半(収束が難しい)の誤差

図１０．後半(Gibbsが起こりやすい)の平均二乗誤差

図９．後半(Gibbsが起こりやすい)の誤差

図５，７，９，１１を見ると、どんなでも、Nが増えるにつれ、誤差は小さくなっていっている。また、平均二乗誤差についても、どのでもNが増えるにつれ小さくなっていっている。このことから、Nを大きくするほど真の関数に近づいていると考えられる。

(2) Gibbsの現象の影響が、どこにどのように現れているか。

Gibbsの現象は、関数が不連続点を持つ場合に不連続点付近でよく起こる。実際に、後半２つ目のは両端付近で不連続点を持つのでGibbsの現象が起きてしまい、不連続点付近では収束が悪く誤差が大きくなっている。

(3) フーリエ級数の有限項近似で近似されやすい関数とされにくい関数の差異

まず、図５，７，９，１１に着目すると、特に誤差が大きい関数に共通するのは、前半の・後半のGibbsの現象が起きる２つ目の関数と、直線部分や変化が急峻な箇所が多い後半の３つ目の関数である。前者2つは、（両端の）不連続点で連続に合わせようとするために起こるGibbsの現象の影響が大きく、後者は、細かい値の変化や直線は有限項の近似だと限界があることが影響している。

また、図６．８．１０．１２も合わせて比較すると、後半の1つ目の関数のように両端がほぼ連続で、cos波に近い関数は、特に収束がしやすく、誤差が小さくNの増減による平均二乗誤差の変化の割合も小さいので、収束しやすい関数と考えられる。

したがって、近似されやすい関数とされにくい関数の差異としては、基本波で表しやすい関数であるかという点と、Gibbsの現象が起こるかどうかという点で異なる。

６．まとめ

いろいろな関数に対して、フーリエ級数展開がNの増加につれ近似が良くなっていることが分かった。また、Gibbsの現象は、不連続点を合わせる際に起き、フーリエ級数展開による近似が起こりにくくなるとわかった。